Исследование второго коэффициента нечетного тригонометрического полинома при одностороннем ограничении

Д.О. Зыков
mitya130@mail.ru

УрФУ (Екатеринбург)

Аннотация

Исследуется задача о наибольшем и наименьшем значениях второго коэффициента нечетных тригонометрических полиномов, не превосходящих функции $\varphi(x) = x$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Аналогичная задача для первого коэффициента была изучена автором ранее.

Ключевые слова: тригонометрический полином, односторонние ограничения.

1 Введение

Рассмотрим множество $\mathfrak{F}_n$ нечётных тригонометрических полиномов

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами порядка $n \geqslant 1$, удовлетворяющих ограничению

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \leqslant x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi. \tag{2}$$

Нас интересует, в каких границах может меняться второй коэффициент таких полиномов, а точнее, нас интересуют следующие значения:

$$A_2^+(n) = \sup\{a_2(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n\}, \qquad A_2^-(n) = \inf\{a_2(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n\}. \tag{3}$$

Экстремальные задачи для алгебраических и тригонометрических полиномов – обширный раздел теории функций. Такие задачи изучаются с середины XVIII века. К настоящему времени этой тематике посвящено большое число публикаций. В частности, большое число исследований посвящено экстремальным задачам для полиномов с ограничениями на их значения, см., к примеру, монографии [1, 2], статьи [3–9] и приведенную там библиографию. В работе автора [10] дано решение задачи, подобной (3), для первого коэффициента и приведены близкие оценки аналогов величин (3) для коэффициента многочленов из класса $\mathfrak{F}_n$ с произвольным номером.

Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the 47th International Youth School-conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016, published at http://ceur-ws.org

Условие (2) можно переписать в более удобной для дальнейшего использования форме. В неравенстве (2) на отрезке $[\pi, 2\pi]$ заменим x на $2\pi - x,\ x \in [0, \pi]$. В результате получим ограничение

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \leqslant 2\pi - x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \geqslant x - 2\pi, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Таким образом, неравенство (2) эквивалентно двум неравенствам

$$x - 2\pi \leqslant s_n(x) \leqslant x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \tag{4}$$

2 Основной результат

В ходе исследований в задаче (3) был получен следующий результат.

Теорема. *Для величин $A_2^{\pm}(n)$ справедливы следующие четыре утверждения.*

1. *При любом $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $A_2^{+}(n) \leqslant 3$.*
2. *Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} A_2^{+}(n) = 3$.*
3. *При любом $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $A_2^{-}(n) \geqslant -5$.*
4. *Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} A_2^{-}(n) = -5$.*

Доказательство. Проверим первое утверждение. Пусть s_n – нечётный тригонометрический полином порядка n, удовлетворяющий условию (2) или, что то же самое, условию (4). С помощью (4) можно следующим образом оценить сверху второй коэффициент a_2:

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} s_n(x)\sin 2x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} s_n(x)\sin 2x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} s_n(x)\sin 2x\,dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x-2\pi)\sin 2x\,dx\right) = 3.$$

Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения теоремы построим семейство конкретных многочленов. Будем исходить из 2π-периодической нечетной функции f, заданной на $[0, \pi)$ соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi/2); \\ x - 2\pi, & x \in (\pi/2, \pi). \end{cases}$$

Функция f обладает следующими двумя легко проверяемыми свойствами:

$$f(x) \leqslant x, \qquad x \geqslant -\frac{\pi}{2}; \tag{5}$$

$$x - 2\pi \leqslant f(x) \leqslant x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\pi. \tag{6}$$

Обозначим через $\varphi_\delta,\ 0 < \delta < \pi/6$, функцию Соболева со свойствами: функция φ_δ определена, неотрицательная, четная и бесконечно дифференцируемая на всей числовой прямой $\mathbb{R}$; $\varphi_\delta(x) = 0$, если $x \notin [-\delta, \delta]$, т. е. носитель φ_δ принадлежит отрезку $[-\delta,\delta]$ и, наконец, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\delta(x)\,dx=1$. С её помощью сгладим функцию f, а точнее, рассмотрим функцию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_\delta(t-x)\,dt.$$

Функция f_δ бесконечно дифференцируемая, нечетная на $\mathbb{R}$ и 2π-периодическая.

Оценим функцию f_δ сверху и снизу на отрезке $[0,2\pi]$. Поскольку $\varphi_\delta(x)=0$ для $x\notin[-\delta,\delta]$, то функцию f_δ можно представить как

$$f_\delta(x)=\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,\varphi_\delta(t-x)\,dt. \tag{7}$$

В силу свойства (5) и ограничения $0<\delta<\frac{\pi}{6}$ имеем

$$f_\delta(x)=\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,\varphi_\delta(t-x)\,dt\leqslant\int_{x-\delta}^{x+\delta} t\,\varphi_\delta(t-x)\,dt=$$

$$=\int_{x-\delta}^{x+\delta}(t-x)\,\varphi_\delta(t-x)\,dt+x\int_{x-\delta}^{x+\delta}\varphi_\delta(t-x)\,dt=x.$$

Аналогично, исходя из свойства (6), получаем

$$f_\delta(x)=\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,\varphi_\delta(t-x)\,dt\geqslant\int_{x-\delta}^{x+\delta}(t-2\pi)\,\varphi_\delta(t-x)\,dt=$$

$$=\int_{x-\delta}^{x+\delta}(t-x)\,\varphi_\delta(t-x)\,dt+(x-2\pi)\int_{x-\delta}^{x+\delta}\varphi_\delta(t-x)\,dt=x-2\pi.$$

Итак, для функции f_δ справедливы оценки

$$x-2\pi\leqslant f_\delta(x)\leqslant x,\qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi. \tag{8}$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x)=S_n(x;f_\delta)=\sum_{k=1}^{n}a_k(\delta)\sin kx$$

ряда Фурье функции f_δ. Коэффициенты Фурье $\{a_k(\delta)\}$ убывают быстрее любой степени номера k; в частности, существует константа $C(\delta)>0$ такая, что $|a_k(\delta)|\leqslant C(\delta)/k^{-3},\ k\geqslant 1$. Поэтому ряд Фурье функции f_δ сходится равномерно и, как следствие,

$$f_\delta(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k(\delta)\sin kx.$$

Поэтому справедлива оценка

$$|f_\delta(x)-S_n(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k(\delta)|\cdot|\sin kx|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{C(\delta)}{k^3}\,xk\leqslant x\cdot\epsilon_n,$$

$$\epsilon_n=\epsilon_n(\delta)=C(\delta)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2};$$

отметим, что $\epsilon_n\to 0,\ n\to\infty$. Для полиномов S_n теперь имеем

$$S_n(x)=f_\delta(x)+S_n(x)-f_\delta(x)\leqslant f_\delta(x)+|f_\delta(x)-S_n(x)|\leqslant x+x\epsilon_n=x(1+\epsilon_n),\qquad x\in[0,2\pi].$$

Тригонометрический полином

$$s_n(x)=\frac{S_n(x)}{1+\epsilon_n}$$

имеет порядок n и удовлетворяет ограничению $s_n(x) \leqslant x,\ x \in [0, 2\pi]$, и потому принадлежит множеству $\mathfrak{F}_n$. Второй коэффициент полинома s_n есть $a_2(\delta)/(1+\epsilon_n)$. Поэтому при любом $n \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\frac{a_2(\delta)}{1+\epsilon_n} \leqslant A_2^+(n) \leqslant 3.$$

Отсюда заключаем, что при любом $0 < \delta < \frac{\pi}{6}$

$$a_2(\delta) \leqslant \lim_{n\to\infty} A_2^+(n) \leqslant 3. \tag{9}$$

Исследуем коэффициент $a_2(\delta)$. Исходя из соотношения (7), нетрудно понять, что

$$f_\delta(x) = f(x) = x, \quad x \in [0, \pi/2 - \delta],$$

$$f_\delta(x) = f(x) = x - 2\pi, \quad x \in [\pi/2 + \delta, \pi - \delta].$$

Поэтому

$$a_2(\delta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_\delta(x)\sin 2x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} x\sin 2x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\pi-\delta}(x-2\pi)\sin 2x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} f_\delta(x)\sin 2x\,dx + \int_{\pi-\delta}^{\pi} f_\delta(x)\sin 2x\,dx\right).$$

В силу (8), имеем

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} f_\delta(x)\sin 2x\,dx = 0,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\pi-\delta}^{\pi} f_\delta(x)\sin 2x\,dx = 0.$$

Следовательно,

$$a_2(\delta) \to 3, \qquad \delta \to +0. \tag{10}$$

Соотношения (9) и (10) влекут свойство

$$A_2^+(n) \to 3, \qquad n \to \infty.$$

Второе утверждение теоремы также доказано.

Третье утверждение доказывается аналогично первому. Оценим вначале снизу коэффициент a_2 полинома (1), используя условия (4):

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi s_n(x)\sin 2x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} s_n(x)\sin 2x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} s_n(x)\sin 2x\,dx\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-2)\pi\sin 2x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin 2x\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\pi + \pi\cos\pi - \frac{\pi}{2}\cos 2\pi\right) = -5.$$

Тем самым третье утверждение теоремы доказано.

Доказательство четвёртого утверждения вновь начнем с построения вспомогательной функции. Обозначим через g нечетную 2π-периодическую функцию, определенную на $(0, \pi)$ соотношениями

$$g(x) = \begin{cases} x - 2\pi, & x \in (0, \frac{\pi}{2}); \\ x, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет тем же ограничениям (5) и (6), что и построенная выше функция f. Поэтому свертка

$$g_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\varphi_\delta(t-x)\,dt$$

функции g с функцией Соболева φ_δ также удовлетворяет ограничениям

$$x - 2\pi \leqslant g_\delta(x) \leqslant x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Теперь рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = S_n(x; g_\delta) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\delta) \sin kx$$

ряда Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\delta) \sin kx$$

функции g_δ. По той же схеме, что и во втором пункте, обосновывается оценка

$$S_n(x) \leqslant x(1+\epsilon_n), \qquad x \in [0, 2\pi],$$

в которой ϵ_n есть положительная величина со свойством $\epsilon_n \to 0$, $n \to \infty$. Полином $s_n = S_n/(1+\epsilon_n)$ принадлежит множеству $\mathfrak{F}_n$. Следовательно, справедливы оценки

$$\frac{a_2(\delta)}{1+\epsilon_n} \geqslant A_2^-(n) \geqslant -5.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$, заключаем, что

$$a_2(\delta) \geqslant A_2^-(n) \geqslant -5. \tag{11}$$

Исследуем теперь поведение коэффициента $a_2(\delta)$ при $\delta \to +0$. Запишем

$$a_2(\delta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g_\delta(x) \sin 2x \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \Big(\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta} (x - 2\pi) \sin 2x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\pi-\delta} x \sin 2x \, dx +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} g_\delta(x) \sin 2x \, dx + \int_{\pi-\delta}^{\pi} g_\delta(x) \sin 2x \, dx + \int_0^{\delta} g_\delta(x) \sin 2x \, dx \Big).$$

Функция g_δ равномерно ограничена по параметру $\delta \in (0, \pi/6)$. Поэтому

$$\lim_{\delta \to 0} \int_0^{\delta} g_\delta(x) \sin 2x \, dx = 0,$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} g_\delta(x) \sin 2x \, dx = 0,$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\pi-\delta}^{\pi} g_\delta(x) \sin 2x \, dx = 0.$$

И, как следствие,

$$a_2(\delta) \to -5, \qquad \delta \to +0. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что $A_3^-(n) \to -5$, $n \to \infty$. Итак, мы доказали последнее утверждение. Теорема доказана полностью.

Благодарности

Автор признателен своему научному руководителю В. В. Арестову за постановку задачи и полезные обсуждения результатов исследования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Список литературы

[1] G. Polya, G. Szegö. Problems and Theorems in Analysis I, II. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.

[2] G.V. Milovanović, D.S. Mitrinovic, Th.M. Rassias. Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros. World Scientific, Singapore, 1994.

[3] L. Fejer. Uber trigonometrische Polynome. *J. Angew. Math.*, 146:53–82, 1915.

[4] E.V. Egervary, O. Szasz. Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome. *Mathematische Zeitschrift*, 27:641–652, 1928.

[5] V.V. Arestov, V.P. Kondratiev. Certain extremal problem for nonnegative trigonometric polynomials. *Math. Notes*, 47(1):10–20, 1990.

[6] Sz.Gy. Révész. A Fejér type extremal problem. *Acta Math. Hungar.*, 57(3–4):279–283, 1991.

[7] Sz. Révész. On some extremal problems of Landau. *Serdica Math. J.*, 33(1):125–162, 2007.

[8] V.V. Arestov, A.S. Mendelev. Trigonometric polynomials of least deviation from zero in measure and related problems. *J. Approx. Theory*, 162(10):1852–1878, 2010.

[9] V.V. Arestov, P.Yu. Glazyrina. Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials. *J. Approx. Theory*, 164(11):1501–1512, 2012.

[10] D.O. Zykov. Coefficients of trigonometric polynomials under a one-sided constraint. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 21(4):152–160, 2015 (in Russian). = Д.О. Зыков. Коэффициенты тригонометрических полиномов при одностороннем ограничении. *Труды Ин-та мат. мех. УрО РАН*, 21(4):152–160, 2015.

Investigation of the second coefficients of trigonometric polynomials under a one-sided constraint

Dmitry O. Zykov
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: trigonometric polynomials, one-sided constraints.

We study the largest and the smallest values of the second coefficient of even trigonometric polynomials bounded from above by the function $\varphi(x) = x$ on the interval $[0, 2\pi]$. A similar problem for the first coefficient was studied by the author earlier.